ამოცანა N1

ტყვიის ბურთთან დაჯახების შემდეგ ტყვიისა და ბურთის სიჩქარეები აღვნიშნოთ შესაბამისად v_1' და v_2'. ისინი ერთნაირ დროში დაეცემიან მიწაზე და დავარდნის დრო ტოლია $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. მაშინ $v_1' = \frac{l}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$. (1ქ)

იმპულსის შენახვის კანონით:

$$mv = Mv_2' + mv_1'$$

საიდანაც:

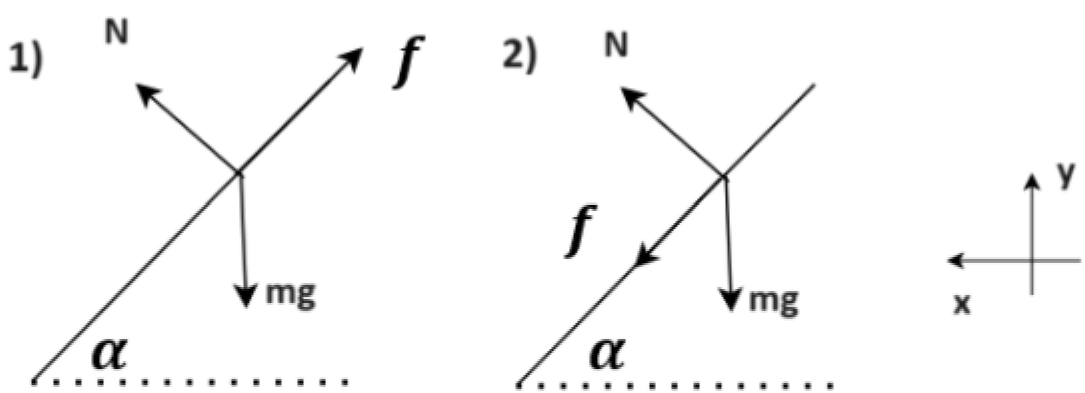
$$v_1' = \frac{mv - Mv_2'}{m} = v - \frac{Ml}{m\sqrt{\frac{2h}{g}}}.$$ (2ქ)

საბოლოოდ ტყვიის ფრენის სიშორე ტოლია:

$$l_1 = v_1' t = \sqrt{\frac{2h}{g}}v - \frac{M}{m}l$$ (2ქ)

ამოცანა N2

თუ ღერო მცირე კუთხური სიჩქარით ბრუნავს, მძივი ქვევით ჩამოსრიალდება, ხოლო თუ ღერო დიდი კუთხური სიჩქარით ბრუნავს, მძივი ზევით ასრიალდება. ქვევით მოყვანილია ორივე შემთხვევისთვის მძივზე მოქმედი ძალების დიაგრამა. (1ქ)



განვიხილოთ პირველი შემთხვევა:

y ღერძზე მძივი წონასწორობაშია, ხოლო x ღერძე მას გააჩნია რადიალური (ცენტრისკენული) აჩქარება.

$$y)\ \mathrm{mg} = \mathrm{Ncos\alpha} + fsin\alpha$$

$$x)\ Nsin\alpha - fcos\alpha = m\omega_1^2 R$$

სადაც ω_1 არის კუთხური სიჩქარე, რომელსაც ჩვენ ვეძებთ. $f = \tan(\alpha) N$, ხოლო R მძივის ჰორიზონტალური წრიული ტრაექტორიის რადიუსი. $R = Lcos\alpha$.

ამ ყველაფრის გაერთიანებით:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g(sin\alpha - sin\alpha)}{L}} = 0$$

(2ქ)

ანუ ღეროს უძრაობის შემთხვევაშიც კი მძივი არ ჩამოსრიალდება. ამ შემთხვევაში უძრავი ღერო შეგვიძლია ავიღოთ ათვლის სისტემად და შევადაროთ ერთმანეთს სიმძიმის ძალის ჩამომასრიალებელი მდგენელი და ხახუნის ძალა. ორივე ძალა $mgsina$-ს ტოლია. შესაბამისად მძივი არ ჩამოსრიალდება და მიღებული შედეგი სწორია.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა:

$$y)\ \mathrm{mg} = \mathrm{Ncos\alpha} - fsin\alpha$$

$$x)\ Nsin\alpha + fcos\alpha = m\omega_2^2 R$$

საიდანაც:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2gtan\alpha}{Lcos\alpha(1 - \tan^2\alpha)}}$$

საბოლოოდ მივიღეთ:

$$0 < \omega \leq \sqrt{\frac{2gtan\alpha}{Lcos\alpha(1 - \tan^2\alpha)}}$$

(2ქ)

ამოცანა N3

აღვნიშნოთ ინდექსით 1 წყალი, ინდექსით 2 გლიცერინი, ხოლო ინდექსით 3 ხის კუბი. კუბის სიმკვრივეა:

$$\rho_3 = \frac{9.2\times10^{-3}\ kg}{(0.02\ m)^3} = 1150\ kg/m^3 \qquad (1ქ)$$

ანუ იგი წყალში ჩაიძირება და გლიცერინში იტივტივებს.

წონასწორობის პირობა იქნება შემდეგი: კუბზე მოქმედი ამომგდები ძალების ჯამი მისი სიმძიმის ძალის ტოლია.

$$F_{ა1} + F_{ა2} = mg \qquad (1ქ)$$

V იყოს კუბის სრული მოცულობა, ხოლო x კუბის გლიცერინში ჩაძირული ნაწილის მოცულობა. მაშინ:

$$\rho_1 g(V - x) + \rho_2 g x = \rho_3 V g \ (1ქ)$$

საიდანაც:

$$\frac{x}{V} = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \ (2ქ)$$

საბოლოოდ რიცხვების ჩასმით:

$$\frac{x}{V} = \frac{(1150 - 1000)\ \mathrm{kg/m^3}}{(1260 - 1000)\ \mathrm{kg/m^3}} = 0.577,$$

ამოცანა N4

თუ θ კუთხე ძალიან მცირეა, ანუ ზედაპირი ფაქტობრივად ჰორიზონტალურია, P წერტილი იქნება ბურთის ტრაექტორიის უმაღლესი წერტილი, რომელიც აუცილებლად უფრო მაღლაა ვიდრე „დახრილი“ სიბრტყე.

მეორე ექსტრემუმის განხილვისას, ანუ თუ θ კუთხე 90 გრადუსის ტოლია მაშინ P წერტილი იქნება ბურთის მიწაზე დაცემის წერტილი, რომელიც აუცილებლად უფრო დაბლაა, ვიდრე გასროლის წერტილი.

უწყვეტობიდან გამომდინარე 0 დან 90 გრადუსამდე უნდა იყოს ისეთი კუთხე, რომლისთვისაც P და გასროლის წერტილები ერთ სიმაღლეზეა. (1ქ)

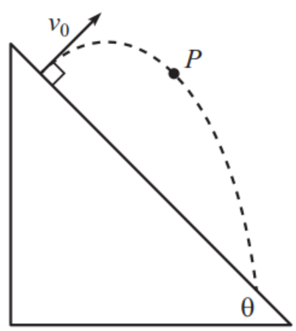
ბურთის ჰორიზონტისადმი გასროლის კუთხეა $90 - \theta$. მაშინ საწყისი სიჩქარის ვერტიკალური მდგენელი იქნება $v_0 cos\theta$. საწყის, ანუ გასროლის სიმაღლეს ბურთი დაუბრუნდება $\frac{2v_0 cos\theta}{g}$ დროში. დავარქვათ ამას t_1 დრო. (1ქ)

განვიხილოთ მოძრაობა დახრილი სიბრტყის მიმართ. გასწვრივი და მართობული აჩქარებები შესაბამისად იქნება $gsin\theta$ და $gcos\theta$. ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ მართობული აჩქარება, რადგან სწორედ ის განაპირობებს ბურთის სიბრტყიდან დაშორებას. განმარტების მიხედვით P წერტილი ყველაზე შორსაა, მაშინ ამ წერტილში მართობული სიჩქარე ნულის ტოლი უნდა იყოს. რადგან საწყისი სიჩქარე v_0-ის ტოლია, მაშინ სიჩქარისა და აჩქარების თანაფარდობიდა, P წერტილში მიღწევის დრო ტოლია: $t_2 = \frac{v_0}{gcos\theta}$. (2ქ) t_1 და t_2 დროები ტოლი უნდა იყოს. ამიტომ:

$$\frac{2v_0 \cos\theta}{g} = \frac{v_0}{g\cos\theta} \implies \cos^2\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = 45^\circ.$$

(1ქ)

ქვევით მოყვანილია ნახაზი სწორი მასშტაბებით:



ამოცანა N5

დავარქვათ ბურთის გასროლის კუთხეს θ. სიმარტივისთვის ბლოკის გასრიალების სიჩქარე იყოს u, ხოლო ბურთის გასროლის სიჩქარე v. ბურთის დახრილ სიბრტყეზე დაცემის მომენტში, მისი x და y კოორდინატები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას: $\frac{y}{x} = tan\beta$. რადგანაც:

$y = (v\sin\theta)t - gt^2/2$ და $x = (v\cos\theta)t$

$$\frac{(v\sin\theta)t - gt^2/2}{(v\cos\theta)t} = \tan\beta$$

ბურთის დაცემის დრო კი გამოდის:

$$\frac{2v\cos\theta}{g}(\tan\theta - \tan\beta).$$

(1ქ)

ბლოკის სიჩქარე ყველაზე მაღალ წერტილში ნულის ტოლია. ამიტომ ასვლის დრო იქნება:

$$u/(g\sin\beta)$$ (1ქ)

ეს ორი დრო ტოლი უნდა იყოს:

$$\frac{u}{g\sin\beta} = \frac{2v\cos\theta}{g}(\tan\theta - \tan\beta) \implies u = 2v\sin\beta\cos\theta(\tan\theta - \tan\beta).$$

ახლა კი მოვითხოვოთ, რომ ორივე მოძრაობის შემთხვევაში დახრილი სიბრტყის გასწვრივ გავლილი მანძილებიც ტოლი იყოს:

$$\frac{v\cos\theta}{\cos\beta} = u - \frac{1}{2}(g\sin\beta)\frac{u}{g\sin\beta} \implies v\cos\theta = \frac{u\cos\beta}{2}.$$

(1ქ)

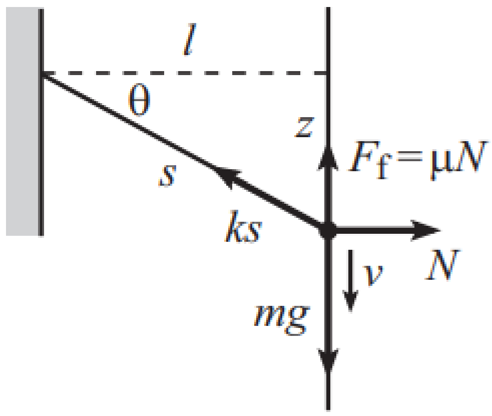
ამ ორის გაერთიანებით:

$$v\cos\theta = v\sin\beta\cos\theta(\tan\theta - \tan\beta)\cdot\cos\beta$$
$$\implies 1 = \sin\beta\cos\beta(\tan\theta - \tan\beta)$$
$$\implies \tan\theta = \tan\beta + \frac{1}{\sin\beta\cos\beta}.$$

(2ქ)

ამოცანა N6

ქვევით მოყვანილია მძივზე მოქმედი ძალების დიაგრამა დროის რაღაც არანულოვანი მომენტისთვის.



ა) რეაქციის ძალამ ყოველთვის უნდა გააწონასწოროს დრეკადობის ძალის ჰორიზონტალური მდგენელი, ამიტომ იგი ყოველთვის ტოლი იქნება:

$$N = (ks)\cos\theta = k(s\cos\theta) = k\ell. \quad (1ქ)$$

აქედან გამომდინარე ხახუნის ძალაც ყოველთვის მუდმივი იქნება.

ბ) დავარქვათ მძივის მაქსიმალურ გადახრას z. მძივს კინეტიკური ენერგია არც საწყის და არც საბოლოო მომენტებში არ გააჩნია. ენერგიის მუდმივობის კანონი კი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$mgz = \left(\frac{1}{2}ks^2 - \frac{1}{2}k\ell^2\right) + (\mu N)z \quad (1ქ)$$

გეომეტრიიდან ჩანს რომ:

$$s^2 - \ell^2 = z^2$$

ამიტომ:

$$mgz = \frac{1}{2}kz^2 + \mu k\ell z \implies z = \frac{2mg}{k} - 2\mu\ell. \quad (1ქ)$$

გ) თავიდან მძივი დაიწყებს ქვევით სრიალს თუ სიმძიმის ძალა მეტი იქნება უძრაობის ხახუნის მაქსიმალურ მნიშვნელობაზე:

$$mg > \mu N \implies mg > \mu(k\ell) \implies \mu < \frac{mg}{k\ell} \,. \qquad (1ქ)$$

გაჩერების შემდეგ მძივი ზევით მოძრაობას დაიწყებს თუ დრეკადობის ძალის ვერტიკალური მდგენელი უფრო დიდია ვიდრე გრავიტაციული ძალისა და უძრაობის ხახუნის ძალის მაქსიმალური მნიშვნელობის ჯამი.

$$kz > mg + \mu N \implies k\left(\frac{2mg}{k} - 2\mu\ell\right) > mg + \mu k\ell$$

$$\implies mg > 3\mu k\ell \implies \mu < \frac{mg}{3k\ell} \,. \qquad (1ქ)$$