31)

ა) ვთქვათ ზამბარას მაქსიმალური შეკუმშვაა x. ჩვენ გვინდა რომ ზამბარას დრეკადობის ძალამ არ გადააჭარბოს მარჯვენა სხეულზე მოქმედ ხახუნის ძალის მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ანუ:

$$kx \leq 2\mu mg \implies x \leq 2\mu mg/k.$$

v-სა და x-ის დაკავშირება ენერგიის მუდმივობის კანონიდანაც შეგვიძლია. მარცხენა ბლოკის საწყისი კინეტიკური ენერგია ტოლი იქნება ზამბარას პოტენციურ ენერგიისა და ხახუნის ძალის მიერ შესრულებული მუშაობის მოდულის ჯამისა.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + (\mu mg)x.$$

x-ის მიმართ კვადრატული განტოლების ამოხსნა არ არის საჭირო. ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ პირველი განტოლების პირობა და ჩავსვათ იგი მეორე განტოლებაში:

$$\frac{mv^2}{2} \leq \frac{k}{2}\left(\frac{2\mu mg}{k}\right)^2 + (\mu mg)\left(\frac{2\mu mg}{k}\right)$$
$$\implies \frac{mv^2}{2} \leq \frac{4\mu^2 m^2 g^2}{k} \implies v \leq \sqrt{\frac{8\mu^2 mg^2}{k}}.$$

ბ) თუ სიჩქარე მიიღებს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას:

$$x = 2\mu mg/k.$$

ენერგიის მუდმივობის კანონის ხელახლა დაწერით კი ვიღებთ:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + (\mu mg)x$$
$$\implies \frac{k}{2}\left(\frac{2\mu mg}{k}\right)^2 = \frac{mu^2}{2} + (\mu mg)\left(\frac{2\mu mg}{k}\right)$$

საიდანაც u=0. ანუ მარცხენა ბლოკი მიაღწევს წონასწორობის მდებარეობას და გაჩერდება.

32)

დავწეროთ ენერგიის შენახვის კანონი ქვედა სხეულისთვის მოძრაობის დაწყების მომენტიდან დაჯახების მომენტამდე.

$$\begin{aligned} & K^{\mathrm{i}} + U_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}} + U_{\mathrm{g}}^{\mathrm{i}} = K^{\mathrm{f}} + U_{\mathrm{s}}^{\mathrm{f}} + U_{\mathrm{g}}^{\mathrm{f}} \\ \Longrightarrow \quad & 0 + \frac{1}{2}kd^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{d}{2}\right)^2 + mg\frac{d}{2} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{3}{8}kd^2 - mg\frac{d}{2} = \frac{1}{2}mv^2. \end{aligned}$$

იმპულსის მუდმივობის კანონით ორივე სხეული ერთად გააგრძელებს მოძრაობას v-ს ნახევარი სიჩქარით. ანუ კინეტიკური ენერგია შემცირდება ორჯერ.
ენერგიის შენახვის კანონი კი ხელახლა რომ დავწეროთ:

$$K^{\mathrm{i}} + U_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}} + U_{\mathrm{g}}^{\mathrm{i}} = K^{\mathrm{f}} + U_{\mathrm{s}}^{\mathrm{f}} + U_{\mathrm{g}}^{\mathrm{f}}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{3}{16}kd^2 - mg\frac{d}{4}\right) + \frac{1}{2}k\left(\frac{d}{2}\right)^2 + 0 = 0 + 0 + (2m)g\frac{d}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{5}{16}kd^2 = \frac{5mgd}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad k = \frac{4mg}{d}\,.$$

33)

ჩვენ გვჭირდება მაქსიმალური სიმაღლისთვის შემდეგი პირობა:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}\,.$$

ხოლო ფრენის სიშორისთვის:

$$2\ell = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}\,.$$

ამ ორის გაერთიანებით:

$$\frac{h}{\ell} = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta} \quad \Longrightarrow \quad \tan\theta = \frac{2h}{\ell}\,.$$

ბ) ტანგენსის მაგივრად ჩავწეროთ გასროლის კუთხის სინუსი:

$$\sin\theta = 2h/\sqrt{4h^2+\ell^2}.$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულება სიმაღლის განტოლებაში და მივიღებთ:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{4h^2}{4h^2+\ell^2} \implies v_0^2 = g\left(\frac{4h^2+\ell^2}{2h}\right).$$

გ) სიჩქარის მინიმუმის მისაღებად გავაწარმოოთ მისი გამოსახულება სიმაღლის მიმართ და გავუტოლოთ მიღებული გამოსახულება ნულს.

$$0 = 2h(8h) - (4h^2+\ell^2)\cdot 2 \implies 0 = 4h^2 - \ell^2 \implies h = \frac{\ell}{2}.$$

ასეთ შემთხვევაში

$$\tan\theta = 2(\ell/2)/\ell = 1 \implies \theta = 45°.$$

34)

ხახუნის ძალა ერთდროულად ორ რამეს აკეთებს. იგი ამცირებს ბურთის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარეს $F = ma$ კანონით და ზრდის ბურთის კუთხურ სიჩქარეს $\tau = I\alpha$ კანონით. ანუ $\Delta\omega$ და Δv ერთმანეთთან კავშირში არიან. მათი დაკავშირება შეგვიძლია იმპულსის მომენტის ფორმულით: $L = Rp$. $\Delta L = R\Delta p$. რადგანაც კუთხური სიჩქარის ზრდასთან ერთად გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე მცირდება, ნიშანი მინუსიც საჭიროა.

$$I\Delta\omega = -Rm\Delta v \implies \left(\frac{2}{5}mR^2\right)\Delta\omega = -Rm\Delta v$$
$$\implies \Delta\omega = -\frac{5}{2R}\Delta v.$$

საბოლოო მომენტში

$$v_f = R\omega_f \implies \omega_f = \frac{v_f}{R}.$$

კუთხური სიჩქარე იცვლება ნულიდან ω_f მდე, ხოლო სიჩქარე იცვლება v_0 დან v_f-მდე. ამ ყველაფრის გათვალისწინებით:

$$\frac{v_f}{R} = -\frac{5}{2R}(v_f - v_0) \implies \frac{7v_f}{2} = \frac{5v_0}{2} \implies v_f = \frac{5v_0}{7}.$$

35)

მონეტა მაშინ დაკარგავს საშრობთან კონტაქს, როცა რეაქციის ძალა N გახდება ნულის ტოლი. მაშინ ცენტრისკენული აჩქარებისთვის ნიუტონის მეორე კანონი დაიწერება შემდეგნაირად:

$$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R} \implies v^2 = gR\cos\theta.$$

ეს განტოლება გვიკავშირებს მონეტის სიჩქარესა და კუთხეს, რომლის გაგებაც გვსურს. თითეულის გასაგებად გვჭირდება დამატებითი განტოლებები. საშრობთან კონტაქტის დაკარგვის მომენტში მონეტის კოორდინატებია (ცენტრის მიმართ) $Rsin\theta, Rcos\theta$. თუ განვიხილავთ მონეტის თავისუფალ ვარდნის, საწყისი სიჩქარის კუთხე ჰორიზონტისადმი იქნება θ. კოორდინატების დროზე დამოკიდებულების ფორმულები კი მოიცემა შემდეგნაირად.

$$x(t) = R\sin\theta - (v\cos\theta)t,$$
$$y(t) = R\cos\theta + (v\sin\theta)t - gt^2/2.$$

თუ მონეტა ეცემა დიამეტრალურად საპირისპირო წერტილს, მაშინ საბოლოო კოორდინატები იქნება $-Rsin\theta, -Rcos\theta$. ამიტომ:

$$\begin{aligned} R\sin\theta - (v\cos\theta)t = -R\sin\theta &\implies (v\cos\theta)t = 2R\sin\theta, \\ R\cos\theta + (v\sin\theta)t - gt^2/2 = -R\cos\theta &\implies gt^2/2 - (v\sin\theta)t = 2R\cos\theta \end{aligned}$$

გამოვსახოთ t პირველი განტოლებიდან და ჩავსვათ მეორეში:

$$\begin{aligned} \frac{g}{2}\left(\frac{2R\sin\theta}{v\cos\theta}\right)^2 - v\sin\theta\left(\frac{2R\sin\theta}{v\cos\theta}\right) = 2R\cos\theta \\ \implies \frac{gR\sin^2\theta}{v^2\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta \\ \implies \frac{gR\sin^2\theta}{v^2\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \\ \implies v^2 = \frac{gR\sin^2\theta}{\cos\theta}. \end{aligned}$$

ესეც მეორე განტოლება რომელიც სიჩქარესა და კუთხეს აკავშირებს. მისი გაერთიანება პირველთან გვაძლევს:

ა) $$\frac{gR\sin^2\theta}{\cos\theta} = gR\cos\theta \implies \tan^2\theta = 1 \implies \theta = 45^\circ.$$

ბ) $$v = \sqrt{\frac{gR}{\sqrt{2}}} \implies \omega = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{2}R}}.$$