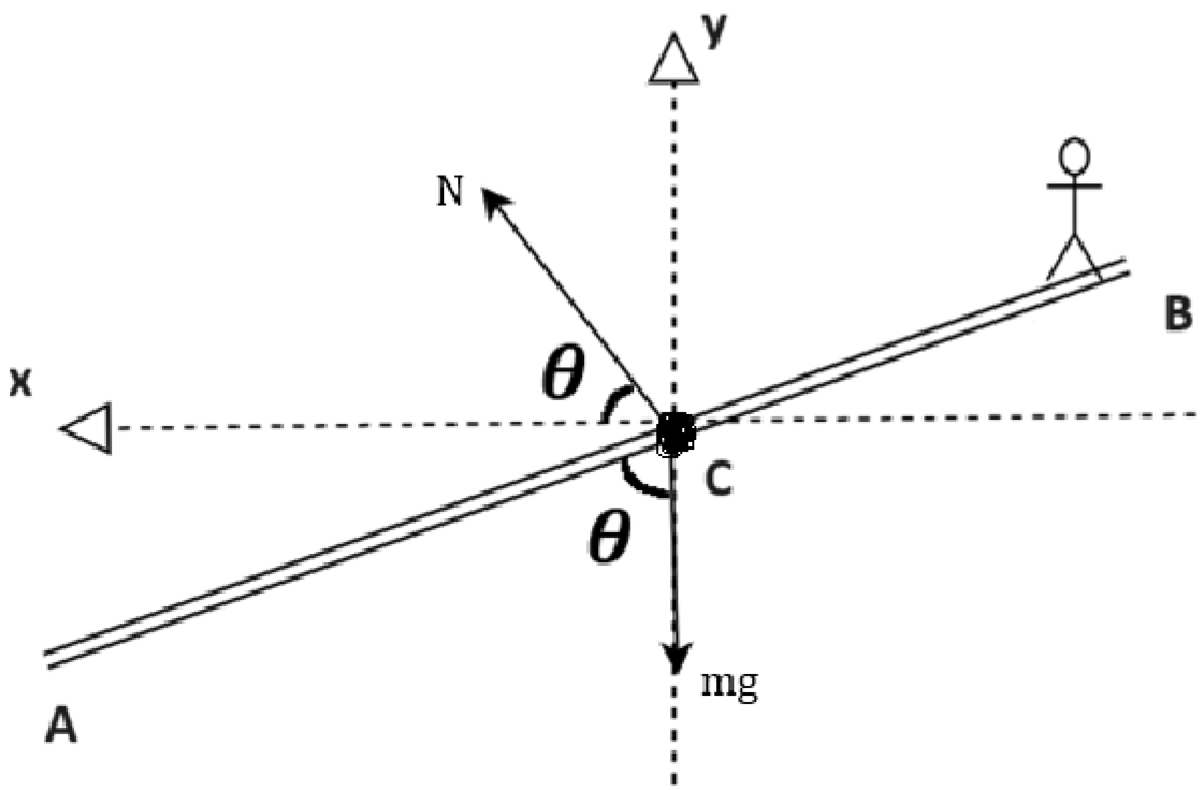
10)

ა) ამ შემთხვევაში, რადგანაც AB ღერძი A მძივთან ერთად მოძრაობს აჩქარებულად ზევით, იგი არ იქნება ათვლის ინერციული სისტემა C მძივისთვის. ანუ ამ ათვლის სისტემაში ნიუტონის კანონებს ვერ დავწერთ. ამიტომ ათვლის სისტემად ავიღოთ დედამიწასთან დაკავშირებული მართკუთხა საკოორდინატო სისტემა, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები.



C მძივს ექნება როგორც ჰორიზონტალური, ასევე ვერტიკალური აჩქარებაც.

$$N cos\theta = m a_{cx}; \quad N sin\theta - mg = m a_{cy}$$

მეორე განტოლებაში მარცხენა მხრიდან მეორე წევრი გადავიტანოთ მარჯვნივ და მეორე განტოლება გავყოთ პირველზე. მივიღებთ:

$$tan\theta = \frac{a_{cy} + g}{a_{cx}}$$

მიღებულ განტოლებაში გვაქვს ორი უცნობი (C მძივის ჰორიზონტალური და ვერტიკალური აჩქარებები). ამიტომ გვჭრდება მეორე განტოლებაც. მიუხედავად იმისა რომ AB ღერძის მიმართ ნიუტონის განტოლებებს ვერ ვწერთ, კინემატიკური განტოლებების დაწერა მაინც შეგვიძლია. წარმოვიდგინოთ დამკვირვებელი, რომელიც

უძრავად ზის AB ღერძზე. მისთვის C მძივი მოძრაობს ჰორიზონტალურად მარცხნივ a_{cx} აჩქარებით. ხოლო რადგან AB ღერძი თვითონ მოძრაობს ზევით a_A აჩქარებით (რასაც დამკვირვებელი ვერ ხვდება), დამკვირვებლისთვის C მძივი y ღერძზე მოძრაობს $a_A - a_{cy}$ აჩქარებით (ნიშანი მინუსი იმიტომ, რომ მძივის აჩქარების დადებით მიმართულებად არჩეული გვაქვს ზედა მიმართულება. თუ $mg > Nsin\theta$ მაშინ მძივის ვერტიკალური აჩქარება უარყოფითი იქნება და მინუსი გაპლიუსდება). დამკვირვებლის თვალით დანახული მძივის სრული აჩქარება AB ღერძის გასწვრივ იქნება მიმართული. ამიტომ:

$$tan\theta = \frac{a_{cx}}{a_A - a_{cy}}$$

ბოლო ორი განტოლების გაერთიანებით ვიღებთ ორუცნობიან და ორგანტოლებიან სისტემას. ამოხსნის შემდეგ ვიღებთ:

$$a_{cx} = \frac{sin^2\theta a_A + g(1 - cos^2\theta)}{tan\theta}; \quad a_{cy} = sin^2\theta a_A - cos^2\theta g$$

საიდანაც:

$$a_c = \sqrt{a_{cx}^2 + a_{cy}^2}$$

ხოლო კუთხე, რომლითაც ეს აჩქარება გადახრილია ჰორიზონტისადმი (დავარქვათ β) ტოლია:

$$\beta = \arctan\left(\frac{|a_{cy}|}{|a_{cx}|}\right)$$

ბ) ამ შემთხვევაში, რადგანაც AB ღერძი A მძივთან ერთად მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით, იგი წარმოადგენს ათვლის ინერციულს სისტემას, ანუ ამ ღერძის მიმართ შეგვიძლია დავწეროთ ნიუტონის განტოლებები. AB ღერძის მართობულ ღერზე C მძივს აჩქარება არ ექნება. მასზე მოქმედი ზედაპირის რეაქციისა და სიმძიმის ძალები

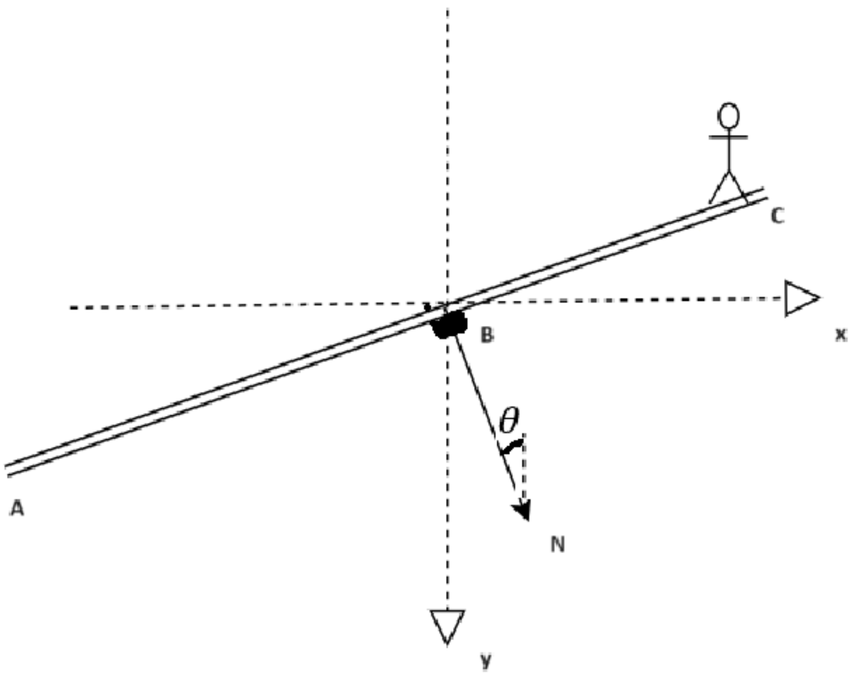
ერთმანეთს გააბათილებენ და მძივი ღერძთან ერთად იმოძრავებს მუდმივი სიჩქარით. ხოლო AB ღერძის გასწვრივ მისი აჩქარება იქნება:

$$a_c = gcos\theta$$

ეს არის C მძივის სრული აჩქარება და იგი მიმართულია AB ღერძის გასწვრივ ქვევით.

11)

გამოვიყენოთ იგივე მიდგომა, რაც წინა ამოცანაში. ათვლის სისტემად ავიღოთ დედამიწასთან დაკავშირებული ათვლის სისტემა (რადგან AC დაფა არ არის ათვლის ინერციული სისტემა).



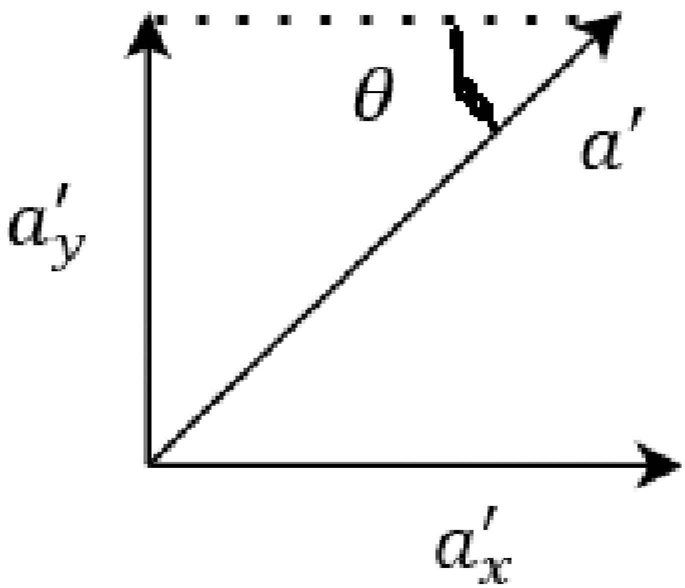
ძალების დიაგრამაზე N არის დაფასა და ბლოკს შორის რეაქციის ძალა. რადგან ბლოკი გლუვია მასზე ხახუნის ძალა არ იმოქმედებს არც დაფასთან კონტაქტისას და არც მაგიდასთან კონტაქტისას. მაგიდასთან რეაქციის ძალა და სიმძიმის ძალა, რომლებიც სურათის სიბრტყის მართობულები არიან, ერთმანეთს აკომპენსირებენ და ამიტომ ისინი ძალების დიაგრამაზე აღარ დავხაზეთ. C ბლოკს აჩქარება ექნება როგორც ჰორიზონტალურ, ასევე ვერტიკალურ ღერძებზე. დავწეროთ ნიუტონის მეორე კანონი:

$$Nsin\theta = ma_a; \quad Ncos\theta = ma_y$$

გავყოთ პირველი განტოლება მეორეზე რათა მოვიშოროთ არასაჭირო უცნობი (N):

$$tan\theta = \frac{a_x}{a_y}$$

უცნობების საპოვნელად მეორე განტოლებად გამოვიყენოთ კინემატიკური განტოლება. AC დაფაზე მყოფი უძრავი დამკვირვებლისთვის B ბლოკი მოძრაობს დაფის გასწვრივ ზევით. მის მიერ დანახული B ბლოკის ჰორიზონტალური აჩქარება (დავარქვათ a'_x) იქნება $a'_x = a_x$, ხოლო ვერტიკალური აჩქარება (დავარქვათ a'_y) იქნება: $a'_y = a_0 - a_y$. დამკვირვებლის თვალით დანახული B ბლოკის სრული აჩქარება a' და მისი ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მდგენელები მოცემულია ნახაზზე:



საიდანაც:

$$tan\theta = \frac{a'_y}{a'_x} = \frac{a_0 - A_y}{a_x}$$

უკანასკნელი ორი განტოლების გაერთიანებით მივიღეთ:

$$a_y = a_0 cos^2\theta; \quad a_x = a_0 cos^2\theta tan\theta \quad \Rightarrow \quad a'_y = a_0(1 - cos^2\theta); \quad a'_x = a_0 cos^2\theta tan\theta.$$

ხოლო დამკვირვებლის თვალით დანახული B ბლოკის სრული აჩქარება a' (ანუ B ბლოკის აჩქარება AC დაფის მიმართ) იქნება:

$$a' = \sqrt{(a'_x)^2 + (a'_y)^2} = \sqrt{(a_0 cos^2\theta tan\theta)^2 + (a_0(1 - cos^2\theta))^2} = a_0 sin\theta.$$

ა) მაშინ, აღნიშვნების სტილისტიკა რომ შევინარჩუნოთ, ბლოკის დაფის მიმართ სიჩქარის (v') დროზე დამოკიდებულება იქნება:

$$v' = v'_0 + a't = a_0 sin\theta t$$

ბ) გავლილი მანძილი კი:

$$s = s_0 + v'_0 t + \frac{1}{2}a't^2 = \frac{1}{2}a_0 sin\theta t^2$$

12)

ა) რადგანაც ენერგია ინახება A ბურთი B ბურთს გადასცემს თავის სრულ საწყის მექანიკურ ენერგიას. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია შევადაროთ საწყისი ენერგია როცა A ბურთი იმყოფება ზედა წვეროში B ბურთის მდგომარეობას როცა იგი გადაიხრება ვერტიკალისადმი θ კუთხით ზევით. რადგანაც გრავიტაციული ენერგიის დანაკარგი გადადის კინეტიკურ ენერგიაში, B ბურთის სიჩქარე ამ დროს იქნება:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(R - R\cos\theta) \implies v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}.$$

როცა B ბურთი იმყოფება წრის ზედა ნახევარში და სანამ ძაფი ჯერ კიდევ დაჭიმულია ნიუტონის მეორე კანონი რადიალური (ცენტრისკენული) აჩქარების მიმართ იქნება:

$$T + mg\cos\theta = mv^2/R.$$

დროის იმ მომენტში, როცა ბურთი გადადის თავისუფალ ვარდნაში, თოკი მოეშვება. ანუ დაჭიმულობის ძალა განულდება. მაშინ იგივე განტოლება გარდაიქმნება:

$$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R} \implies mg\cos\theta = \frac{m(2gR(1-\cos\theta))}{R}$$
$$\implies \cos\theta = 2 - 2\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{2}{3} \implies \theta \approx 48.2^\circ.$$

ბ) B ბურთს მოძრაობის ყველაზე მაღალ წერტილში სიჩქარის ვერტიკალური მდგენელი გაუნულდება. ენერგიის მუდმივობის კანონი გვკარნახობს, რომ პოტენციური ენერგიის დანაკარგი წრეწირის ზედა წვეროდან ამ წერტილამდე გადადის ჰორიზონტალური მოძრაობის კინეტიკურ ენერგიაში. სიჩქარის ჰორიზონტალურ მდგენელს ამ მოძრაობის დროს აქვს მუდმივი მნიშვნელობა:

$$v_x = v\cos\theta = \sqrt{2gR/3}$$

მაშინ თუ Δh არის სიმაღლის სხვაობა წრეწირის წვეროდან თავისუფალი ვარდნის მაქსიმალურ სიმაღლემდე, ენერგიის მუდმივობის კანონი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$mg\,\Delta h = \frac{1}{2}mv_x^2 \implies mg\,\Delta h = \frac{1}{2}m\left(\frac{8gR}{27}\right) \implies \Delta h = \frac{4R}{27}.$$

13)

ა) მანამ სანამ ძაფი დაიჭიმება მხტომელი თავისუფალ ვარდნაშია (უსაწყისო სიჩქარით).

ვთქვათ x არის თოკის მაქსიმალური გაჭიმვა (ჩავთვალოთ იგი დადებითად). მანძილი რომლითაც მხტომელი ჩამოვარდება ქვევით იქნება $l + x$. კინეტიკური ენერგია არც გადმოხტომისას გვაქვს და არც საბოლოო მომენტში. ენერგიის მუდმივობის კანონით:

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgx - mg\ell = 0 \implies x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2mg\ell k}}{k}.$$

პლუს ნიშანი ავირჩიეთ იმიტომ რომ x გავსზაღვრეთ როგორც დადებითი სიდიდე. მინუს ნიშნის შემთხვევაში იგი იქნებოდა უარყოფითი. ეს მათემატიკური გამოსახულება შეესაბამება ზამბარაზე მობმული მერხევი სხეულის ზედა ამპლიტუდას.

ჩამოვარდნის მაქსიმალური სიმაღლე კი გამოდის უბრალოდ $l + x$.

ზღვრები: განტოლების მიხედვით როცა $k \to \infty$ $x \to 0$. ხოლო როცა $k \to 0$ $x \to \infty$. ორივე ზღვარი ჩვენს შემთხვევას შეესაბამება. როცა $l \approx 0$ $x \approx 2mg/k$. დაფიქრდით რატომაა ეს

ლოგიკური შედეგი.
ბ) გამოვიყენოთ წინა კითხვის პასუხი და ძაფის დაჭიმულობა ქვედა წერტილში გამოვა:

$$T = kx = mg + \sqrt{m^2g^2 + 2mg\ell k}\,.$$

გ) აჩქარების გასაგებად დავწეროთ ნიუტონის მეორე კანონი ქვედა წერტილისთვის:

$$T - mg = ma \quad \Rightarrow a = \frac{T - mg}{m} = \frac{\sqrt{m^2g^2 + 2mglk}}{m} = \sqrt{g^2 + 2glk/m}$$

დ) მხტომელი მაქსიმალურ სიჩქარეს მიაღწევს დროის იმ მომენტში, როცა მისი აჩქარება ნულის ტოლი გახდება, ანუ $T = mg$.

$$kx_2 = mg \quad \Rightarrow x_2 = \frac{mg}{k}$$

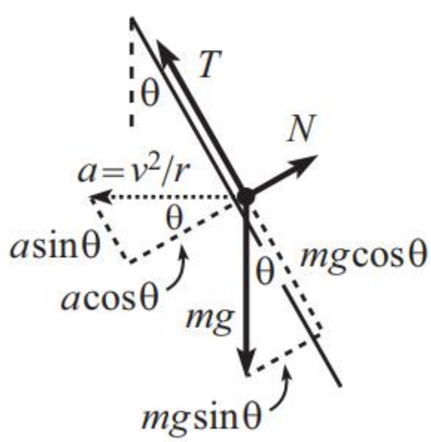
ამ დროს პლატფორმიდან ათვლილი სიმაღლე იქნება:

$$h = l + \frac{mg}{k}$$

ე) ძაფის ორჯერ შუაზე გადაჭრით, ანუ მისი სიგრძის ორჯერ შემცირებით, მისი სიხისტე ორჯერ გაიზრდება. ამიტომ ნამრავლი lk იქნება იგივე, შესაბამისად ძაფის დაჭიმულობა ქვედა წერტილში იქნება იგივე, რაც ბ) კითხვაში.

14)

ა) სხეულზე მოქმედი ძალების დიაგრამა მოცემულია ნახაზზე



ძალების ტოლქმედი იწვევს ჰორიზონტალურ ცენტრისკენულ აჩქარებას $a = v^2/r$ სადაც $r = lsin\theta$. დავწეროთ ნიუტონის განტოლებები კონუსის პარალელური და მართობული ღერძების მიმართ.

$$T - mg\cos\theta = m\left(\frac{v^2}{\ell\sin\theta}\right)\sin\theta \implies T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{\ell}.$$

ბ)

$$mg\sin\theta - N = m\left(\frac{v^2}{\ell\sin\theta}\right)\cos\theta \implies N = mg\sin\theta - \frac{mv^2}{\ell\tan\theta}.$$

გ) ბურთი ინარჩუნებს კონუსთან კონტაქს თუ $N \geq 0$. ამიტომ ცენტრისკენული აჩქარების ფორმულა გადაიწერება:

$$mg\sin\theta \geq \frac{mv^2}{\ell\tan\theta} \implies v \leq \sqrt{g\ell\sin\theta\tan\theta} \equiv v_{\max}.$$

თუ $v = v_{max}$ სხეული კონუსთან თითქმის არ იქნება კონტაქტში და კონუსი რომც გამოვაცალოთ სხეული თავის მოძრაობას არ შეიცვლის.