6) რადგანაც სიჩქარის ვექტორი ყოველთვის ძაფის დაჭიმულობის მართობულია, ბურთულა იმოძრავებს მუდმივი v_0 სიჩქარით.

ა) როდესაც ძაფი გადაიხარა θ კუთხით ბურთულას გააჩნია ცენტრისკენული აჩქარება, რომელსაც ანიჭებს ძაფის დაჭიმულობის ძალა. $T = \frac{mv^2}{r}$ -სადაც r წრიული მოძრაობის მყისი რადიუსია. $r = L_0 - R\theta$-სადაც θ-კუთხე გადაზომილია რადიანებში. შესაბამისად $T = m\frac{v_0^2}{L_0 - R\theta}$.

ბ) გამოვიყენოთ კუთხური სიჩქარის ფორმულა:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{r} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{L_0 - R\theta}.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ

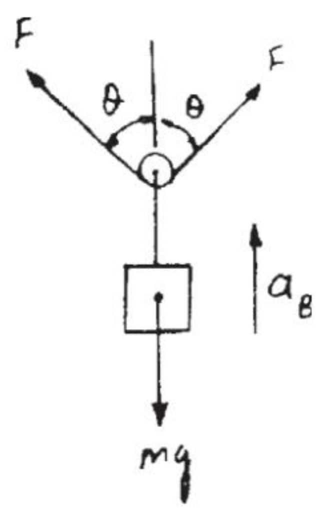
$$\int (L_0 - R\theta) d\theta = \int v_0 \, dt \Rightarrow L_0\theta - R\frac{\theta^2}{2} = v_0 t + C.$$

საწყისი პირობით როცა $t = 0$, $\theta = 0$ ამიტომ $C = 0$. გადავწეროთ მიღებული განტოლება კანონიკური სახით: $\theta^2 - \frac{2L_0}{R}\theta + \frac{2v_0}{R}t$ საიდანაც:

$\theta = \frac{L_0}{R}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{L_0^2}}\right)$. θ დროსთან ერთად უნდა იყოს ზრდადი და ასევე როცა $t = 0$, $\theta = 0$. ამ პირობების დაკმაყოფილებისთვის ვიტოვებთ მინუს ნიშანს:

$\theta = \frac{L_0}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{L_0^2}}\right)$ ფესვქვეშა გამოსახულება ნულზე ნაკლები არ გახდება, რაც აიხსნება მარტივი დაკვირვებით. როცა თოკი ბორბალზე სრულად დაეხვევა, ანუ როცა $R\theta = L_0 \Rightarrow \theta = \frac{L_0}{R}$ ეს მოძრაობა შეწყდება, შესაბამისად ფუნქციის განსაზღვრის არე დროის ამ მომენტზე მთავრდება. ამ დროს ფესქვეშა გამოსახულება ნულის ტოლია.

7) ნახაზზე მოცემულია B ცილინდრზე მოქმედი ძალების დიაგრამა.



ა)

$$F_y = ma_y; \qquad 2F\cos\theta - mg = ma_B \quad \textbf{სადაც} \qquad \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

$$2F\left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}\right) - mg = ma_B$$

$$F = \frac{m(a_B + g)\sqrt{4y^2 + d^2}}{4y}$$

ბ) მინიმუმის ან მაქსიმუმის დასათვლელად გავაწარმოოთ ა) კითხვაში მიღებული გამოსახულება y-ის მიმართ და გავუტოლოთ ნულს:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m(a_B+g)\sqrt{4\,y^2+d^2}}{4\,y}\right) = -\frac{d^2\,m(a_B+g)}{4\,y^2\sqrt{d^2+4\,y^2}} = 0$$

თუმცა ეს გამოსახულება ნულის ტოლი ვერ გახდება, რაც იმას ნიშნავს რომ ფუნქციას გლობალური ან ლოკალური მინიმუმ/მაქსიმუმი არ გააჩნია. ანუ ფუნქცია მოცემულ ინტერვალზე ან მხოლოდ ზრდადია, ან მხოლოდ კლებადი. შემოწმება მარტივად შეიძლება: თუ ძალის განტოლებაში y-ს წავიყვანთ ნულისაკენ, ძალა წავა უსასრულობისკენ. ანუ ძალა მაქსიმალურია როცა $y \to 0$. ხოლო მინიმალური ძალა საჭირო იქნება დროის იმ მომენტში, როცა ცილინდრი მოძრაობას იწყებს.

8) ავიღოთ y=0 დონე რგოლის ცენტრში. მაშინ ბურთლას სიმაღლე როგორც θ-ს ფუნქცია იქნება: $Rcos\theta$. შესაბამისად ენერგიის მუდმივობის კანონის მიხედვით ბურთის სიჩქარე როცა იგი გადაიხარა ვერტიკალიდან θ კუთხით დაითვლება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mg(R\cos\theta)$$
$$\Longrightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\theta).$$

ა) აღვნიშნოთ N-ით რეაქციის ძალა რომლითაც რგოლი მოქმედებს მძივზე (ეს ძალა საპირისპიროა იმ ძალისა, რომელსაც ამოცანა გვეკითხება). დავწეროთ ნიუტონის მეორე

კანონი ცენტრისკენული აჩქარებისათვის:

$$N + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$\Longrightarrow \quad N + mg\cos\theta = \frac{mv_0^2}{R} + 2mg(1 - \cos\theta)$$

$$\Longrightarrow \quad N = \frac{mv_0^2}{R} + 2mg - 3mg\cos\theta.$$

ნიუტონის მესამე კანონის მიხედვით მძივიც ამავე სიდიდის ძალით მოქმედებს რგოლზე, უბრალოდ ეს ძალები მიმართულია საპირისპირო მხარეს. ამიტომ:

$$N_y = N\cos\theta = \left(\frac{mv_0^2}{R} + 2mg - 3mg\cos\theta\right)\cos\theta.$$

ბ) N_y ის მაქსიმუმის გასაგებად გავაწარმოოთ იგი θ-ს მიმართ და გავუტოლოთ ნულს:

$$0 = \frac{dN_y}{d\theta} = -\frac{mv_0^2}{R}\sin\theta - 2mg\sin\theta + 6mg\sin\theta\cos\theta$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{3} + \frac{v_0^2}{6gR}.$$

მიღებული გამოსახულება ვალიდურია მხოლოდ იმ შემთხვევაში თუ $v_0^2 \leq 4gR$. სწორედ ეს იგულისხმებოდა იმაში, რომ საწყისი სიჩქარე შედარებით მცირეა. თუ დავუშვებთ რომ $v_0^2 \leq 4gR$, N_y-ის მეორე წარმოებული გამოდის უარყოფითი თეტა კუთხის იმ მნიშვნელობისთვის, რომელიც ჩვენ დავითვალეთ. ეს ნიშნავს რომ ჩვენ გვაქვს N_y-ის ლოკალური მაქსიმუმი. ანუ ეს არის კუთხე, რომლის დროსაც მძივი მაქსიმალური ძალით აწვება რგოლს ზევით. ზედა განტოლების კიდევ ერთი ამონახსნია: $sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

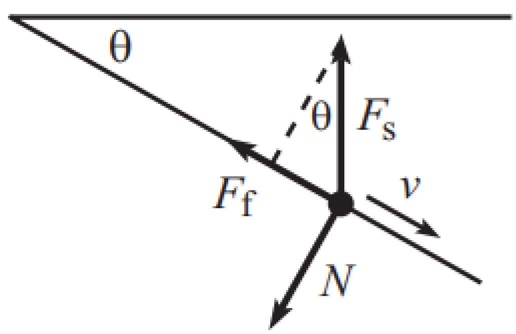
მაგრამ თუ $v_0^2 \leq 4gR$, N_y-ის მეორე წარმოებული გამოდის დადებითი (როცა $\theta = 0$). ანუ ამ შემთხვევაში გვაქვს ლოკალური მინიმუმი. ეს შედეგი თანხვედრაშია გ) კითხვის მსჯელობასთან, რომელიც ქვევით არის მოყვანილი.

გ) თუ $v_0^2 = 4gR$ ბ) კითვის განტოლებიდან გამოდის რომ $cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$. ეს შეესაბამება რგოლის ზედა წვეროს. თუ $v_0^2 > 4gR$, N_y-ის წარმოებული ნულის ტოლი გამოდის მხოლოდ იმ შემთხვევაში თუ $cos\theta > 1$. ეს კი შეუძლებელია. ამიტომ N_y მაქსიმალური იქნება განსაზღვრის არის ზღვრულ მნიშვნელობაზე, ანუ როცა $cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$. ეს პასუხი თანხვედრაშია ბ) კითხვის მეორე პასუხთან, კერძოდ: $sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ რომელიც ახლა

ლოკალური მაქსიმუმია. შესაბამისად, სიჩქარის ის მნიშვნელობა რომელსაც ჩვენ ვეძებთ არის:

$$\sqrt{4gR} = 2\sqrt{gR}.$$

9) ა) ნახაზზე მოცემულია ზამბარის დრეკადობის, მძივის რელსთან ხახუნისა და რელსთან რეაქციის ძალები (როცა მძივი უკან მოდის ხახუნის ძალა საპირისპირო მხარეს იქნება მიმართული)



თუ მძივის მიერ რელსის გასწვრივ გავლილი მანძილია x, მაშინ ზამბარას წაგრძელება იქნება x$sin\theta$. აქედან:

$$F_s = k(x\sin\theta).$$

$$N = F_s\cos\theta = kx\sin\theta\cos\theta.$$

$$F_f = \mu N = \mu kx\sin\theta\cos\theta.$$

ბ) მაქსიმალურ წაგრძელებაზე მძივი გაჩერდება. შესაბამისად მისი საწყისი კინეტიკური ენერგიის ნაწილი გადაიზრდება ზამბარას პოტენციურ ენერგიაში, ხოლო ნაწილი დაიკარგება ხახუნის ძალის მიერ შესრულებული უარყოფითი მუშაობის გამო.

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}k(xsin\theta)^2 + \overline{F_f}x$$

სადაც $\overline{F_f}x$ ხახუნის ძალის საშუალო მნიშვნელობაა.

იგი იცვლება ნულიდან $\mu kxsin\theta cos\theta$ -მდე ამიტომ $\overline{F_f} = \frac{1}{2}\mu kxsin\theta cos\theta$

შედეგად: $\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}k(xsin\theta)^2 + \frac{1}{2}\mu kx^2 sin\theta cos\theta$

შესაბამისად მაქსიმალური გავლილი მანძილი იქნება:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k(\sin^2\theta + \mu\sin\theta\cos\theta)}}\,.$$

გ) მძივი დაიწყებს უკან მოძრაობას თუ ზამბარას დრეკადობის ძალის მდგენელი რელსის გასწვრივ უფრო დიდი იქნება ვიდრე უძრაობის ხახუნის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

$$kx_{\max}\sin^2\theta > \mu kx_{\max}\sin\theta\cos\theta \implies \tan\theta > \mu.$$

დ) ენერგიის შენახვის კანონი ისევ რომ დავწეროთ, ზამბარას საწყისი პოცენციური ენერგიის ნაწილი გადაიზარდა საბოლოო კინეტიკურ ენერგიაში, ნაწილი კი დაიკარგა ხახუნის ძალის მიერ შესრულებული უარყოფითი მუშაობის გამო.

$$\frac{1}{2}k(x_{max}sin\theta)^2 = \frac{1}{2}\mu k(x_{max})^2 sin\theta cos\theta + \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$\implies \frac{1}{2}kx_{\max}^2(\sin^2\theta - \mu\sin\theta\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{f}}^2.$$

$$v_{\mathrm{f}}^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{mv_0^2}{k(\sin^2\theta + \mu\sin\theta\cos\theta)}\right)(\sin^2\theta - \mu\sin\theta\cos\theta)$$

$$\implies v_{\mathrm{f}} = v_0\sqrt{\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\sin\theta + \mu\cos\theta}}\,.$$