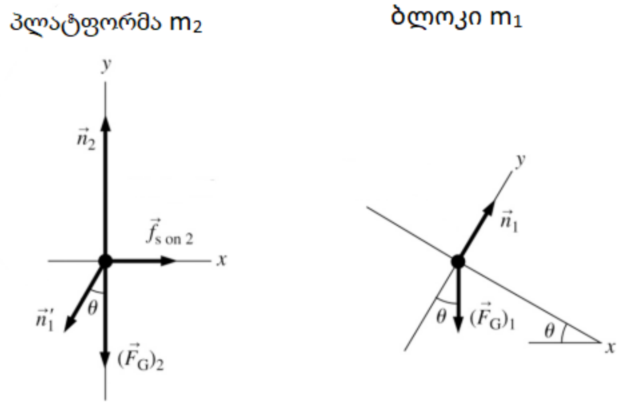
1) პლატფორმასა და ბლოკზე მოქმედი ძალების დიაგრამა მოცემულია სურათზე



სასწორის ჩვენება იქნება $\vec{n}_2$ (საყრდენის რეაქციის ძალა რომლითაც სასწორი აწვება პლატფორმას ზევით) გაყოფილი თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაზე.
ბლოკი თავის ათვლის სისტემაში y ღერძზე უძრავია, ამიტომ მასზე მოქმედი ძალების განტოლება y ღერძზე იქნება:

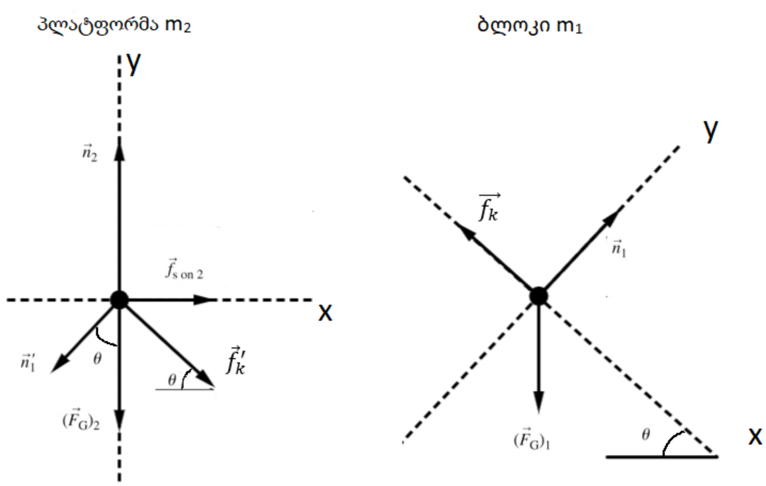
$$n_1 - m_1 g\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad n_1 = m_1 g\cos\theta$$

ნიუტონის მესამე კანონით $n_1' = n_1 = m_1 g cos\theta$. პლატფორმა თავის ათვლის სისტემაში y ღერძზე უძრავია, ამიტომ მასზე მოქმედი ძალების განტოლება y ღერძზე იქნება:

$$n_2 - n_1' cos\theta - m_2 g = 0 \Rightarrow n_2 = (m_1 cos^2\theta + m_2)g.$$

შესაბამისად სასწორის ჩვენება იქნება: $m_1 cos^2\theta + m_2$

ა) ამ შემთხვევაში სხეულების ძალების დიაგრამას დაემატება სრიალის ხახუნის ძალა $\vec{f}'_k$ და $\vec{f}_k$ პლატფორმასა და ბლოკს შორის.



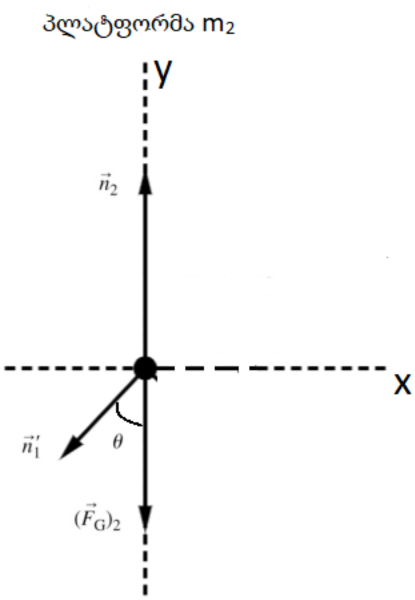
პლატფორმაზე სასწორის მხრიდან მოქმედი უძრაობის ხახუნის ძალა $f_{s\ on\ 2}$ პირობითად ისევ მარჯვნივ დავტოვოთ რადგანაც მისი მიმართულება ან მნიშვნელობა არ მოახდენს

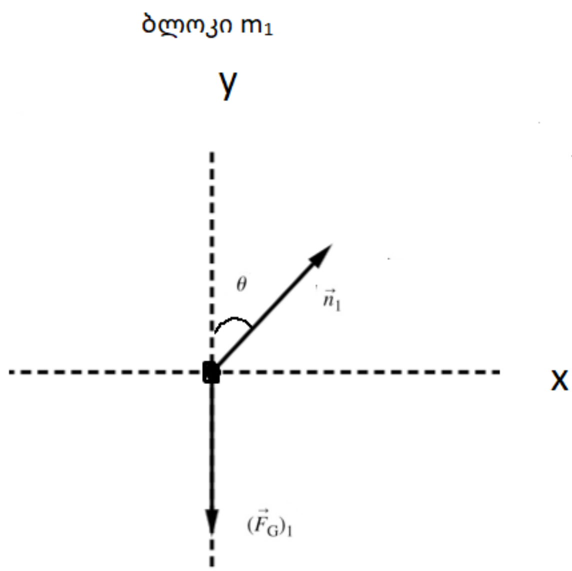
გავლენას $\vec{n}_2$ ძალაზე. ცხადია $f'_k = f_k$. ბლოკი თავის ათვლის სისტემაში y ღერძზე ისევ უძრავია, ამიტომ ისევ $n_1 = m_1 g cos\theta$. მაშინ $f'_k = f_k = \mu_k n_1 = \mu_k m_1 g cos\theta$. პლატფორმა თავის ათვლის სისტემაში y ღერძზე ისევ უძრავია, ამიტომ მასზე მოქმედი ძალების განტოლება y ღერძზე იქნება:

$$n_2 - n'_1 cos\theta - m_2 g - f'_k sin\theta = 0 \Rightarrow n_2 = (m_1 cos^2\theta + m_2 + \mu_k m_1 cos\theta sin\theta)g.$$

შესაბამისად სასწორის ჩვენება იქნება: $m_1 cos\theta(cos\theta + \mu_k sin\theta) + m_2$

ბ) ამ შემთხვევაში ხახუნის ძალები ყველა ზედაპირს შორის გაქრება, რაც იმას ნიშნავს რომ პლატფორმა გარკვეული a_2 აჩქარებით მარცხნივ დაიწყებს მოძრაობას. თავის ათვლის სისტემაში პლატფორმა y ღერძზე ისევ წონასწორობაში იქნება, ამიტომ ისევ $n_2 - n'_1 cos\theta - m_2 g = 0$. აქ ისევ $n'_1 = n_1$ მაგრამ $n_1 \neq m_1 g cos\theta$. ბლოკისთვის y ღერძი პლატფორმის დახრილი სიბრტყეა, რომელიც ბლოკისთვის აღარ არის ათვლის ინერციული სისტემა, რამეთუ იგი a_2 აჩქარებით მარცხნივ მორძაობს. შესაბამისად ამ ათვლის სისტემაში ბლოკისათვის ნიუტონის კანონებს ვეღარ დავწერთ. ამიტომ ბლოკისთვისაც, ისევე როგორც პლატფორმისთვის ათვლის სისტემად ავიღოთ დედამიწასთან დაკავშირებული უძრავი xy სისტემა.

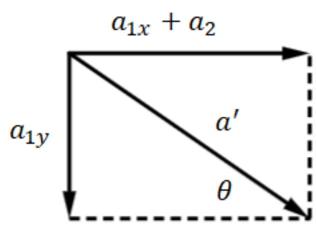




პლატფორმას მარცხნივ მიმართულ a_2 აჩქარებას ანიჭებს n'_1 ძალა, ამიტომ $n'_1 sin\theta = m_2 a_2 \Rightarrow n'_1 = \frac{m_2 a_2}{sin\theta}$.

ბლოკის აჩქარება a_1 დავყოთ ჰორიზონტალურ a_{1x} (მარჯვნივ) და ვერტიკალურ a_{1y} (ქვევით) მდგენელებად. $\mathrm{n}_1 sin\theta = m_1 a_{1x}$, $m_1 g - n_1 cos\theta = m_1 a_{1y}$. უცნობებისა და განტოლებების რაოდენობიდან გამომდინარე გვჭირდება კიდევ ერთი განტოლება. დავამყაროთ კინემატიკური კავშირი აჩქარებებს შორის. პლატფორმისთვის ბლოკი მოძრაობს ქვევით a_{1y} აჩქარებით და მარჯვნივ $a_{1x} + a_2$ აჩქარებით (პლატფორმა თავისი

თავისთვის უძრავია, მაგრამ ჰორიზონტალურ ღერძზე მანძილი პლატფორმასა და ბლოკს შორის თითოეულის გავლილი მანძილების ჯამის ტოლია, ამიტომ პლატფორმაზე მყოფი დამკვირვებლისთვის ბლოკმა გარკვეულ t დროში გაიარა $x = \frac{a_{1x}t^2}{2} + \frac{a_2 t^2}{2} = (a_{1x} + a_2)t^2/2$. პლატფორმისთვის ბლოკის სრული აჩქარება a' მიმართულია დახრილის სიბრტყის გასვრივ ქვევით.



აქედან $tan\theta = a_{1y}/(a_{1x} + a_2)$. გავაერთიანოთ ეს განტოლებები სისტემაში:

$$\begin{cases} n_1' sin\theta = m_2 a_2 \\ \mathrm{n}_1 sin\theta = m_1 a_{1x} \\ m_1 g - n_1 cos\theta = m_1 a_{1y} \\ tan\theta = a_{1y}/(a_{1x} + a_2) \end{cases}$$

საიდანაც $a_2 = \frac{g m_1}{(m_1+m_2)tan\theta + m_2/tan\theta} \Rightarrow n_1' = \frac{m_2}{sin\theta} \frac{g m_1}{(m_1+m_2)tan\theta + m_2/tan\theta}$ ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა: $n_2 - n_1' cos\theta - m_2 g = 0$ განტოლებაში, საიდანაც მივიღებთ $n_2 = \frac{m_2}{sin\theta} \frac{g m_1}{(m_1+m_2)tan\theta + m_2/tan\theta} \cdot cos\theta + m_2 g = g(m_2 + \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)\tan^2\theta + m_2})$.

შესაბამისად სასწორის ჩვენება იქნება: $(m_2 + \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)\tan^2\theta + m_2})$.

2)

ა) $d = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ ფორმულის გამოყენებით ბურთის სიჩქარე მილიდან გამოსვლის მომენტში იქნება: $v = \sqrt{v_0^2 - 2ax}$. მილიდან გამოსვლის მომენტში სხეულის სიჩქარის ვერტიკალური მდგენელი ნულის ტოლია, ამიტომ ძირს დაცემის დრო გამოითვლება: $gt^2/2 = h \implies t = \sqrt{2h/g}$. ამ დროის განმავლობაში სხეული ჰორიზონტზე გაივლის vt მანძილს, მაგრამ ამას უნდა დავუმატოთ მილის სიგრძეც, ამიტომ სრული გავლილი მანძილი გამოვა:

$$\ell = x + vt = x + \sqrt{v_0^2 - 2ax}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

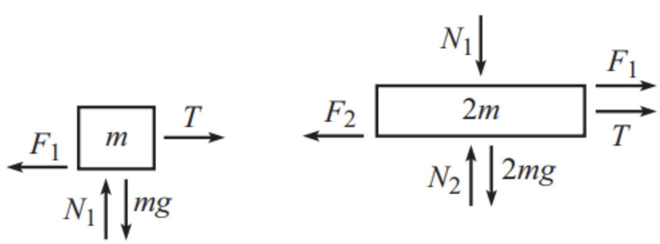
ბ) ჰორიზონტალური მანძილის ფორმულიდან ლოგიკურად ვერ ვიტყვით მილის სიგრძის რა მნიშვნელობისათვის იქნება იგი მაქსიმალური, რამეთუ მილის სიგრძეს ორმაგი ეფექტი აქვს, მისი წყალობით სხეული უფრო მეტ ჰორიზონტალ მანძილს გადის, მაგრამ მილი ასევე ამცირებს სიჩქარეს, რის გამოც ჰაერში ყოფნის დროს სხეული ნაკლებ მანძილს გადის. ამიტომ გავაწარმოოთ გავლილი მანსისი მილის

სიგრძის მიმართ და გავუტოლოთ წარმოებული ნულს.

$$0 = \frac{d\ell}{dx} = 1 + \frac{1}{2}\frac{-2a}{\sqrt{v_0^2 - 2ax}}\sqrt{\frac{2h}{g}} \implies \sqrt{v_0^2 - 2ax} = a\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

აქედან: $$x = \frac{v_0^2}{2a} - \frac{ah}{g}$$. მილის სიგრძე $\frac{v_0^2}{2a}$ - ზე ნაკლები მივიღეთ, რაც სწორია, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ბურთი მილიდან ვერ გამოაღწევდა.

3) სურათზე ნაჩვენებია ორივე ბლოკზე მოქმედი ძალების დიაგრამა.



ბლოკებს შორის ზედაპირის რეაქციის ძალა N_1 და ქვედა ბლოკსა და მაგიდას შორის ზედაპირის რეაქციის ძალა N_2 მარტივი საპოვნელია. $N_1 = mg$ $N_2 = 3mg$. რადგანაც ჭოჭონაქი უმასოა, მასზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი ნულის ტოლი უნდა იყოს, აქედან $2T = 6mg \Rightarrow T = 3mg$. ხახუნის ძალები F_1 (ბლოკებს შორის) და F_2 (ქვედა ბლოკსა და მაგიდას შორის) ჯერ-ჯერობით უცნობია.

ა) ჩავთვალოთ რომ ქვედა ბლოკი უძრავია. მასზე მოქმედებს სამი ძალა. F_2 არის უძრაობის ხახუნის ძალა, რომლის მაქსიმალური მნიშვნელობაა $\mu_s N_2$ ანუ $3mg$. ამას შეუძლია მარჯვნივ მიმართლი ძაფის დაჭიმულობის ძალა გააბათილოს, მაგრამ გვრჩება ასევე მარჯვნივ მიმართული F_1 ძალა, რომელიც არ არის ნულის ტოლი, რამეთუ თუ ქვედა ბლოკი უძრავია, ზედა უნდა სრიალებდეს. გამოდის $F_1 = \mu_k N_1 = mg$. შესაბამისად ქვედა ბლოკზე მოქმედის ძალების ტოლქმედი არ არის ნულის ტოლი. ამიტომ ქვედა ბლოკი ვერ იქნება წონასწორობაში.

ბ) ჩავთვალოთ რომ ზედა ბლოკი არ სრიალებს ქვედა ბლოკის მიმართ. ქვედა ბლოკი აუცილებლად მისრიალებს მაგიდის მიმართ (ა კითხვის პასუხი). ასეთ შემთხვევაში შეგვიძლია ბლოკები განვიხილოთ ერთ სხეულად რომლის მასაა $3mg$. მათზე მოქმედებს მარცხნივ მიმართული სრიალის ხახუნის ძალა $F_2 = 3mg$ და მარჯვნივ მიმართული $2T = 6mg$ ძალა. ძალების ტოლქმედი გამოდის მარჯვნივ მიმართული $3mg$ ძალა, რომელიც $3m$ მასის სხეულს მიანიჭებს g აჩქარებას. ახლა კი დავწეროთ ნიუტონის მეორე კანონი მხოლოდ ზედა ბლოკისთვის, მისი მარჯვნივ მიმართლი აჩქარებაა g. $T - F_1 = mg \Rightarrow F_1 = T - mg = 3mg - mg = 2mg$. ჩვენი დაშვების მიხედვით ეს ძალა უძრაობის ხახუნის ძალა უნდა იყოს, ანუ მისი მაქსიმალური

მნიშვნელობაა $\mu_s N_1 = mg$. გამოდის რომ ეს ხახუნის ძალა ვერ გახდება $2mg$-ს ტოლი, ანუ ჩვენი თავდაპირველი დაშვება (ზედა ბლოკი არ სრიალებს ქვედას მიმართ) იყო მცდარი.
გ) ხელის აჩქარება ჭოჭონაქის აჩქარების ტოლი იქნება. უკვე გავარკვიეთ რომ ყველა ზედაპირი ერთმანეთის მიმართ სრიალებს. ეს ნიშნავს რომ ხახუნის ყველა ძალა სრიალის ხახუნის ძალაა დავწეროთ ბლოკებისთვის ნიუტონის მეორე კანონი:

$$\begin{aligned}
m: \quad & T - F_1 = ma_1 && \Longrightarrow \quad 3mg - mg = ma_1 \\
& && \Longrightarrow \quad a_1 = 2g, \\
2m: \quad & T + F_1 - F_2 = (2m)a_2 && \Longrightarrow \quad 3mg + mg - 3mg = 2ma_2 \\
& && \Longrightarrow \quad a_2 = g/2.
\end{aligned}$$

რადგანაც ძაფის სიგრძე მუდმივია ჭოჭონაქის, ანუ ხელის აჩქარება ტოლი იქნება:

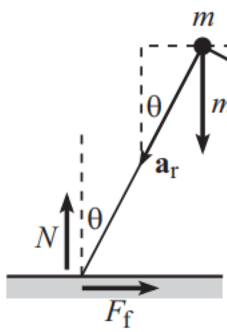
$$a_{\text{hand}} = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{2g + g/2}{2} = \frac{5g}{4}\,.$$

4)

რადგანაც ხახუნის ძალა ყველა ზედაპირს შორის ნულის ტოლია, თუ a ნულის ტოლია m_2 ჩასრიალდება ქვევით და m_1 გასრიალდება მარჯვნივ. ხოლო თუ a ძალიან დიდი იქნება m_1 გასრიალდება მარჯვნივ, ხოლო m_2 ასრიალდება ზევით. აქედან გამომდინარე აჩქარებისთვის უნდა არსებობდეს რაღაც შუალედური მნიშვნელობა, რომლის დროსაც არცერთი ზედაპირის ერთმანეთის მიმართ არ მოძრაობს.
თუ არც ერთი სხეული ერთმანეთის მიმართ არ მოძრაობს m_2 უძრავია ვერტიკალურ ღერძზე. აქედან $T = m_2 g$. m_1-ისთვის ნიუტონის მეორე კანონი ჰორიზონტალურ ღერძე შემდეგნაირად დაიწერება: $\mathrm{T} = m_1 a \Rightarrow m_2 g = m_1 a \Rightarrow a = g \cdot m_2/m_1$. თუ ამ აჩქარებით იმოძრავებს m_1 იგი M -ის მიმართ არ გასრიალდება. ანუ M-ის აჩქარებაც უნდა იყოს: $a = g\frac{m_2}{m_1}$.

5)

როცა ჯოხი გადაიხარა θ კუთხით ბურთის სიმაღლე გახდა $lcos\theta$.



ენერგიის შენახვის კანონიდან გამომდინარეობს:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(\ell - \ell\cos\theta) \implies v^2 = 2g\ell(1-\cos\theta).$$

ბურთს ამ მომენტში აქვს რადიალური (ცენტრისკენული) და ტანგენციალური აჩქარება. რადიალური აჩქარება ტოლი იქნება:

$$a_r = \frac{v^2}{\ell} = 2g(1-\cos\theta).$$

ხოლო სიმძიმის ძალის დაგეგმილებით ტანგენციალური აჩქარება გამოდის:

$$a_t = g\sin\theta.$$

ჯერ-ჯერობით ვთვლით რომ ჯოხი არ სრიალებს და ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ხახუნის ძალა F_f და ზედაპირის რეაქციის ძალა N. შემდეგ კი გამოვიყენოთ $F_f \leq \mu N$ პირობა. მათი გაგება შესაძლებელია ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ ღერძებზე ნიუტონის მეორე კანონის დაწერის საშუალებით:

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x \\ \implies F_f &= ma_t\cos\theta - ma_r\sin\theta \\ &= mg[\sin\theta\cos\theta - 2(1-\cos\theta)\sin\theta] \\ &= mg\sin\theta(3\cos\theta - 2), \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned} F_y &= ma_y \\ \implies mg - N &= ma_t\sin\theta + ma_r\cos\theta \\ \implies N &= mg[1 - \sin^2\theta - 2(1-\cos\theta)\cos\theta] \\ &= mg[1 - (1-\cos^2\theta) - 2(1-\cos\theta)\cos\theta] \\ &= mg\cos\theta(3\cos\theta - 2). \end{aligned}$$

მაშინ $F_f \leq \mu N$ პირობიდან გამოდის რომ:

$$mg\sin\theta(3\cos\theta - 2) \leq \mu mg\cos\theta(3\cos\theta - 2).$$

ჩავთვალოთ რომ $cos\theta > 2/3$ ანუ $\theta < 48.2°$, და გავყოთ განტოლების ორივე მხარე $(3cos\theta - 2)$-ზე. აქედან გამოდის რომ: $tan\theta \leq \mu$
ეს არის აუცილებელი პირობა, რათა ჯოხი არ გასრიალდეს. თუმცა ეს არ არის საკმარისი, რადგან თუ $cos\theta < 2/3$ ანუ თუ $\theta > 48.2°$ ზედაპირის რეაქციის ძალა უარყოფითი გამოდის, რაც შეუძლებელია (რეალურად ჯოხი აღარ ეხება მაგიდას). შესაბამისად $F_f \leq \mu N$ პირობა ვერ იქნება ჭეშმარიტი. შესაბამისად ჯოხი გასრიალდება თუ $\theta > 48.2°$ μ-ს რაგინდ დიდი მნიშვნელობისთვის, მაგრამ თუ μ საკმარისად მცირეა, სრიალი მოხდება უფრო ადრე, კუთხისთვის, რომელიც მოიცემა განტოლებით $tan\theta = \mu$. რადგანაც $cos^{-1}(2/3) = tan^{-1}(\sqrt{5}/2)$ ჩვენ შეგვიძლია შევაჯამოთ ჩვენი მსჯელობა და ვთქვათ, რომ ჯოხი გასრიალდება θ კუთხისთვის, რომელიც მოიცემა შემდეგნაირად:

$$\theta = tan^{-1}(\mu) \qquad \text{თუ} \quad \mu \leq \sqrt{5}/2$$
$$\theta = tan^{-1}(\sqrt{5}/2) = 48.2° \qquad \text{თუ} \quad \mu \geq \sqrt{5}/2$$